# ÜBER UNGLEICHFÖRMIGE BEWEGUNGEN EINES FADENS, BEI DENEN ER SEINE GESTALT NICHT ÄNDERT.

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR ERLANGUNG DER DOKTORWÜRDE
EINER HOHEN NATURWISSENSCHAFTLICHEN FAKULTÄT
DER EBERHARD-KARLS-UNIVERSITÄT TÜBINGEN

VORGELEGT VON

**EDUARD LIEB.**

DRUCK VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG 1912.

Angenommen von der naturwissenschaftlichen Fakultät 18. November 1911.

# Einleitung.

Im 57. Bd. des Crelleschen Journals hat CLEBSCH das Problem des Gleichgewichts eines unausdehnbaren, nicht schweren Fadens, welcher an einer sich mit gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit drehenden Achse befestigt ist, gelöst und die wichtigsten Sätze über die Gleichgewichtskurve aufgestellt. Die Kurve, deren Koordinaten sich durch elliptische Funktionen ausdrücken, gleicht einer Schraubenlinie, und ihre Projektion auf eine zur Rotationsachse senkrechte Ebene hat Ähnlichkeit mit der Projektion der Bahn des sphärischen Pendels auf die Horizontalebene.

Wenn die Achse, an welcher der Faden befestigt ist, sich mit *gleichförmiger* Winkelgeschwindigkeit dreht, so wird der Faden die Gestalt, welche er unter dem Einfluß der Zentrifugalkraft angenommen hat, dauernd behalten. Wenn jedoch die Winkelgeschwindigkeit mit der Zeit veränderlich ist, so wird im allgemeinen der Faden seine Gestalt ändern. Immerhin fragt es sich, ob es nicht auch hier Fälle gibt, in welchen der Faden seine Gestalt behält.

Wir werden im nachstehenden untersuchen, unter welchen Umständen bei *ungleichförmiger* Rotation der Achse ein mit ihr verbundener unausdehnbarer, vollständig biegsamer Faden während der ganzen Dauer der Rotation seine Gestalt behält, wenn er, wie wir der Einfachheit halber annehmen, ganz in einer zur Rotationsachse senkrechten Ebene liegt.

Wir schicken der Untersuchung selbst den Beweis eines von P. APPELL aufgestellten Satzes voraus, auf den wir uns im folgenden mehrfach beziehen werden, und der in seiner allgemeinen Fassung noch nicht bewiesen worden zu sein scheint.

Die Anregung zu dieser Arbeit hat mir mein hochverehrter Lehrer, Herr Professor Dr. VON BRILL, gegeben, hiefür, sowie für den mannigfachen Rat während der Ausarbeitung spreche ich ihm meinen herzlichsten Dank aus.

## § 1

## Hilfssatz.

Es liege eine Relation vor von der Form

$$A_1 T_1 + A_2 T_2 + \cdots A_n T_n = 0, \tag{1}$$

in welcher die $A_i$ reine Funktionen einer Variablen $a$ und die $T_i$ reine Funktionen einer von $a$ unabhängigen Variablen $t$ sind. Es sollen die Beziehungen gefunden werden, welche zwischen den $A_i$ und den $T_i$ bestehen müssen, damit die Relation (1) für jeden Wert von $a$ und jeden Wert von $t$ erfüllt sei.

In einem Aufsatz: „Sur le mouvement d'un fil dans un plan fixe“ (Acta mathematica Bd. 12) löst P. Appell die Relation (1) dadurch, daß er zwischen den $A_i$ lineare, homogene Relationen mit konstanten Koeffizienten annimmt. Er findet, daß dann auch zwischen den $T_i$ ähnliche Relationen bestehen. Ferner sagt Appell, daß, wenn z. B. die $A_i$ sämtlich linear unabhängig voneinander sind, die $T_i$ verschwinden müssen, d. h. also, daß lineare, homogene Relationen zwischen den $A_i$ und zwischen den $T_i$ die einzige Lösung der Relation (1) bilden.

Dieser Satz läßt sich für den allgemeinen Fall auch durch den Schluß von $n$ auf $n+1$ beweisen, wenn er für $n = 2$ bewiesen ist. Die Relation

$$A_1 T_1 + A_2 T_2 = 0$$

kann, wenn keines der $A$, $T$ verschwindet, nur gelöst werden durch

$$A_1 \alpha + A_2 = 0, \quad T_1 = \alpha T_2,$$

wo $\alpha$ eine Konstante bedeutet. Der Satz gilt daher für $n = 2$.

Angenommen, die Relation (1) sei unter der Voraussetzung, daß keines der $A_i$, $T_i$ verschwinde, nur erfüllbar durch:

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l} P_1\alpha_{k+1} + P_2\beta_{k+1} + \cdots P_k\varkappa_{k+1} + P_{k+1} = 0 \\ P_1\alpha_{k+2} + P_2\beta_{k+2} + \cdots P_k\varkappa_{k+2} + P_{k+2} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ P_1\alpha_n \quad + P_2\beta_n \quad + \cdots P_k\varkappa_n \quad + P_n \quad = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} n-k \\ \text{Relationen,} \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{l} Q_1 = Q_{k+1}\alpha_{k+1} + Q_{k+2}\alpha_{k+2} + \cdots Q_n\alpha_n \\ Q_2 = Q_{k+1}\beta_{k+1} + Q_{k+2}\beta_{k+2} + \cdots Q_n\beta_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ Q_k = Q_{k+1}\varkappa_{k+1} + Q_{k+2}\varkappa_{k+2} + \cdots Q_n\varkappa_n \end{array}\right\} k \text{ Relationen.}$$

Hiebei sind $Q_1 \cdots Q_k$ irgend $k$ der Funktionen $T$, ebenso $P_1 \cdots P_k$ irgend $k$ der Funktionen $A$. Wir setzen dabei fest, daß wenn z. B. $Q_1 = T_i$ gesetzt wird, $P_1 = A_i$ gesetzt werden soll. Die $\alpha, \beta, \cdots \varkappa$ sind Konstanten, $k$ kann jeden Wert annehmen von $1 \cdots n-1$. Die Gleichungen (2) erfüllen dann die mit (1) identische Relation

$$(1a)\qquad P_1Q_1 + P_2Q_2 + \cdots P_nQ_n = 0,$$

und zwar können wir in (2) für $Q_1 \cdots Q_k$ jede Kombination der Elemente $T_1 \cdots T_n$ zur $k$.-Klasse setzen.

Wir betrachten nun die Relation

$$(3)\qquad A_1T_1 + A_2T_2 + \cdots A_iT_i + \cdots A_{n+1}T_{n+1} = 0$$

oder

$$A_1\frac{T_1}{T_i} + A_2\frac{T_2}{T_i} + \cdots A_{i-1}\frac{T_{i-1}}{T_i} + A_{i+1}\frac{T_{i+1}}{T_i} + \cdots A_{n+1}\frac{T_{n+1}}{T_i} = -A_i.$$

Da diese Gleichung für jeden Wert von $a$ und jeden Wert von $t$ bestehen soll, so kann man sie partiell nach einer der Variablen differentiieren, leitet man nach $t$ ab und bezeichnet man die Ableitungen durch Striche, so wird:

$$(4)\quad A_1\left(\frac{T_1}{T_i}\right)' + A_2\left(\frac{T_2}{T_i}\right)' + \cdots A_{i-1}\left(\frac{T_{i-1}}{T_i}\right)' + A_{i+1}\left(\frac{T_{i+1}}{T_i}\right)' + \\ + \cdots A_{n+1}\left(\frac{T_{n+1}}{T_i}\right)' = 0.$$

Nimmt man zunächst an, daß keiner der Differentialquotienten verschwindet, so verschwindet auch keiner der Differentialquotienten in der mit (4) identischen Relation:

$$(4a)\qquad P_1\left(\frac{Q_1}{Q_{n+1}}\right)' + P_2\left(\frac{Q_2}{Q_{n+1}}\right)' + \cdots P_n\left(\frac{Q_n}{Q_{n+1}}\right)' = 0,$$

wobei wir

$$T_i = Q_{n+1}, \quad A_i = P_{n+1}$$

gesetzt haben.

Da die Relation (4) die Form (1) besitzt, so wird sie erfüllt durch:

$$\begin{aligned}
&P_1\alpha_{k+1} + P_2\beta_{k+1} + \cdots P_k\varkappa_{k+1} + P_{k+1} = 0\\
&P_1\alpha_{k+2} + P_2\beta_{k+2} + \cdots P_k\varkappa_{k+2} + P_{k+2} = 0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&P_1\alpha_n \;\; + P_2\beta_n \;\; + \cdots P_k\varkappa_n \;\; + P_n \;\; = 0,\\
&\left(\frac{Q_1}{Q_{n+1}}\right)' = \left(\frac{Q_{k+1}}{Q_{n+1}}\right)'\alpha_{k+1} + \left(\frac{Q_{k+2}}{Q_{n+1}}\right)'\alpha_{k+2} + \cdots \left(\frac{Q_n}{Q_{n+1}}\right)'\alpha_n\\
&\left(\frac{Q_2}{Q_{n+1}}\right)' = \left(\frac{Q_{k+1}}{Q_{n+1}}\right)'\beta_{k+1} + \left(\frac{Q_{k+2}}{Q_{n+1}}\right)'\beta_{k+2} + \cdots \left(\frac{Q_n}{Q_{n+1}}\right)'\beta_n\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\left(\frac{Q_k}{Q_{n+1}}\right)' = \left(\frac{Q_{k+1}}{Q_{n+1}}\right)'\varkappa_{k+1} + \left(\frac{Q_{k+2}}{Q_{n+1}}\right)'\varkappa_{k+2} + \cdots \left(\frac{Q_n}{Q_{n+1}}\right)'\varkappa_n.
\end{aligned}$$

Sind $\alpha_{k+1}, \beta_{k+1} \cdots \varkappa_{k+1}$ neue Konstanten, so folgt durch Integration:

$$\begin{aligned}
Q_1 &= Q_{k+1}\alpha_{k+1} + Q_{k+2}\alpha_{k+2} + \cdots Q_n\alpha_n + Q_{n+1}\alpha_{n+1}\\
Q_2 &= Q_{k+1}\beta_{k+1} + Q_{k+2}\beta_{k+2} + \cdots Q_n\beta_n + Q_{n+1}\beta_{n+1}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
Q_k &= Q_{k+1}\varkappa_{k+1} + Q_{k+2}\varkappa_{k+2} + \cdots Q_n\varkappa_n + Q_{n+1}\varkappa_{n+1},
\end{aligned}$$

wobei $k$ wieder jeden Wert annehmen kann von $1 \cdots n-1$. Nun setzen wir dies in die mit (3) identische Relation

$$P_1Q_1 + P_2Q_2 + \cdots P_{n+1}Q_{n+1} = 0$$

ein. Es hebt sich alles weg bis auf

$$(P_1\alpha_{n+1} + P_2\beta_{n+1} + \cdots P_k\varkappa_{n+1})\,Q_{n+1} = 0.$$

Wenn wir nun wieder annehmen, daß in (3) keines der $T$ verschwinde, so folgt:

$$P_1\alpha_{n+1} + P_2\beta_{n+1} + \cdots P_kx_{n+1} = 0.$$

Diese Relation ist den andern zwischen den $P$ beizufügen, so daß man erhält:

(5)
$$\left\{\begin{aligned}
&P_1\alpha_{k+1} + P_2\beta_{k+1} + \cdots P_k\varkappa_{k+1} + P_{k+1} = 0\\
&P_1\alpha_{k+2} + P_2\beta_{k+2} + \cdots P_k\varkappa_{k+2} + P_{k+2} = 0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&P_1\alpha_{n+1} + P_2\beta_{n+1} + \cdots P_k\varkappa_{n+1} + P_{n+1} = 0\\
&Q_1 = Q_{k+1}\alpha_{k+1} + Q_{k+2}\alpha_{k+2} + \cdots Q_n\alpha_n + Q_{n+1}\alpha_{n+1}\\
&Q_2 = Q_{k+1}\beta_{k+1} + Q_{k+2}\beta_{k+2} + \cdots Q_n\beta_n + Q_{n+1}\beta_{n+1}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&Q_k = Q_{k+1}\varkappa_{k+1} + Q_{k+2}\varkappa_{k+2} + \cdots Q_n\varkappa_n + Q_{n+1}\varkappa_{n+1}.
\end{aligned}\right.$$

Hiebei geht $k$ von $1 \cdots n-1$. Nun will ich annehmen, in (4) seien sämtliche Differentialquotienten Null. Diese Annahme ergibt den neuen Fall:

$$Q_1 = Q_{n+1}\alpha_{n+1},\ Q_2 = Q_{n+1}\beta_{n+1},\ \cdots\ Q_n = Q_{n+1}\varkappa_{n+1},$$
$$P_1\alpha_{n+1} + P_2\beta_{n+1} + \cdots P_k\varkappa_{n+1} + P_{n+1} = 0.$$

Dieser Fall ist aber in (5) enthalten, wenn man dort $k$ von $1 \cdots n$ gehen läßt.

Wenn nun in (4) irgend $r$ Differentialquotienten verschwinden, so kann man, da ja z. B. für $Q_1$ jedes der $T$ gesetzt werden kann, ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen:

$$\left(\frac{Q_1}{Q_{n+1}}\right)' = \left(\frac{Q_2}{Q_{n+1}}\right)' = \cdots \left(\frac{Q_r}{Q_{n+1}}\right)' = 0.$$

Auch die hieraus sich ergebenden Fälle sind in (5) enthalten, sofern dort $k \geqq r$ gesetzt wird. Sie können aus (5) durch Nullsetzen eines Teils der Konstanten erhalten werden. Ebenso sind auch in (5) die Fälle enthalten, die man erhält, wenn einige der $A$, $T$ verschwinden.

Wenn nun die Relation (1) nur durch (2) gelöst werden kann, so kann die Relation (3) nur durch (5) gelöst werden, d. h. nur durch ein Gleichungssystem, das genau die Form (2) hat. Setzt man in (2) $n = 2$, so erhält man die Lösung der Relation

$$A_1T_1 + A_2T_2 = 0.$$

Man erhält also die Lösung der Relation

$$A_1T_1 + A_2T_2 + A_3T_3 = 0$$

aus (2), indem man dort $n = 3$ setzt usw. Damit ist gezeigt:

Eine Relation von der Form

$$A_1T_1 + A_2T_2 + \cdots A_nT_n = 0,$$

wo die $A_i$ reine Funktionen einer Variablen $a$ und die $T_i$ reine Funktionen einer von $a$ unabhängigen Variablen $t$ sind, kann nur durch lineare, homogene Relationen mit konstanten Koeffizienten zwischen den $A_i$ einerseits und den $T_i$ andrerseits erfüllt werden. Nimmt man $k$ Relationen zwischen den $T_i$ an, so bestehen $n-k$ Relationen zwischen den $A_i$.

Für die Relation

$$A_1T_1 + A_2T_2 + A_3T_3 = 0,$$

auf die wir im folgenden kommen werden, ergeben sich für $A_i$, $T_i \neq 0$ nur zwei Fälle:

1. $A_1 = k_1 A_3, \qquad k_1 T_1 + k_2 T_2 + T_3 = 0,$
$A_2 = k_2 A_3,$

2. $k_1 A_1 + k_2 A_2 + A_3 = 0, \qquad T_1 = k_1 T_3,$
$T_2 = k_2 T_3.$

## § 2.

## Aufstellung der Differentialgleichungen.

Mit Hilfe des soeben bewiesenen Satzes nun wollen wir untersuchen, ob es eine Rotationsbewegung eines ebenen, unausdehnbaren Fadens gibt, bei welcher dieser seine Gestalt nicht ändert, obgleich er als vollkommen biegsam vorausgesetzt wird.

Sind $x, y$ rechtwinklige Koordination in der Ebene des Fadens, $a$ seine Bogenlänge, gemessen von einem bestimmten Punkte des Fadens bis zu einem beliebigen Punkt, $\Psi(a)$ die in Funktion des Bogens gegebene Dichte und $\Psi X$, $\Psi Y$ die Komponenten der Kraft pro Längeneinheit, so lauten die Bewegungsgleichungen:

$$\Psi \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial a}\left(\lambda \frac{\partial x}{\partial a}\right) + \Psi X$$
$$\Psi \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial a}\left(\lambda \frac{\partial y}{\partial a}\right) + \Psi Y. \qquad \left(\frac{\partial x}{\partial a}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial a}\right)^2 = 1$$

Wenn nun der Faden bei der Rotation seine Gestalt nicht ändert, so sind seine Koordinaten in einem System, das sich mit dem Faden dreht, Funktionen bloß des Bogens $a$. Die Koordinaten in diesem System seien $x_1$, $y_1$; der Winkel $\vartheta$, den die $x_1$-Achse mit der $x$-Achse bildet, ist eine reine Funktion von $t$. Seine Ableitungen nach $t$ mögen durch Punkte bezeichnet werden. Man hat dann, wenn beide Systeme den Drehpunkt zum Ursprung haben:

$$x = x_1 \cos\vartheta - y_1 \sin\vartheta$$
$$y = x_1 \sin\vartheta + y_1 \cos\vartheta.$$

Damit folgt aus den Bewegungsgleichungen:

$$(6) \quad \begin{cases} \Psi(-y_1\ddot{\vartheta} - x_1\dot{\vartheta}^2) = \dfrac{\partial}{\partial a}\left(\lambda \dfrac{dx_1}{da}\right) + \Psi(\quad X\cos\vartheta + Y\sin\vartheta) \\ \Psi(\quad x_1\ddot{\vartheta} - y_1\dot{\vartheta}^2) = \dfrac{\partial}{\partial a}\left(\lambda \dfrac{dy_1}{da}\right) + \Psi(-X\sin\vartheta + Y\cos\vartheta) \\ \left(\dfrac{dx_1}{da}\right)^2 + \left(\dfrac{dy_1}{da}\right)^2 = 1. \end{cases}$$

Diese Gleichungen sind zu erfüllen. Dabei möge angenommen werden, daß der Faden mit seinen Enden an einer sich mit dem

Faden drehenden reibungslosen Ebene befestigt sei. Wir integrieren nun nach $a$ zwischen den Grenzen $a_0$ und $a$ und setzen:

$$(7)\quad \begin{cases} \Psi = \dfrac{1}{\Theta} \\ u = \int_{a_0}^{a} \Psi x_1 \, da, \quad v = \int_{a_0}^{a} \Psi y_1 \, da, \quad U = \int_{a_0}^{a} \Psi X \, da, \quad V = \int_{a_0}^{a} \Psi Y \, da \\ x_1 = \Theta \dfrac{du}{da}, \quad y_1 = \Theta \dfrac{dv}{da}, \quad X = \Theta \dfrac{\partial U}{\partial a}, \quad Y = \Theta \dfrac{\partial V}{\partial a} \\ [\lambda]_{a=a_0} = \lambda_0, \quad \left[\dfrac{dx_1}{da}\right]_{a=a_0} = \cos \alpha_0, \quad \left[\dfrac{dy_1}{da}\right]_{a=a_0} = \sin \alpha_0, \end{cases}$$

$u$, $v$ sind also den Schwerpunktskoordinaten des Fadenstücks $a - a_0$ proportional, und $U$, $V$ sind die Komponenten der Resultante der auf das Fadenstück $a - a_0$ wirkenden äußeren Kräfte. Man erhält:

$$\lambda_0 \cos \alpha_0 - v\ddot{\vartheta} - u\dot{\vartheta}^2 - U \cos \vartheta - V \sin \vartheta = \lambda \frac{d}{da}\left(\Theta \frac{du}{da}\right)$$

$$\lambda_0 \sin \alpha_0 + u\ddot{\vartheta} - v\dot{\vartheta}^2 + U \sin \vartheta - V \cos \vartheta = \lambda \frac{d}{da}\left(\Theta \frac{dv}{da}\right)$$

$$(8)\qquad \left[\frac{d}{da}\left(\Theta \frac{du}{da}\right)\right]^2 + \left[\frac{d}{da}\left(\Theta \frac{dv}{da}\right)\right]^2 = 1.$$

Mit Hilfe der letzten Gleichung gewinnt man aus den beiden ersten:

$$(9)\qquad \lambda = \frac{d}{da}\left(\Theta \frac{du}{da}\right)\left[\lambda_0 \cos \alpha_0 - v\ddot{\vartheta} - u\dot{\vartheta}^2 - U \cos \vartheta - V \sin \vartheta\right] + \frac{d}{da}\left(\Theta \frac{dv}{da}\right)\left[\lambda_0 \sin \alpha_0 + u\ddot{\vartheta} - v\dot{\vartheta}^2 + U \sin \vartheta - V \cos \vartheta\right].$$

Die Elimination von $\lambda$ ergibt:

$$(10)\quad \begin{aligned} &\ddot{\vartheta}\left[u \frac{d}{da}\left(\Theta \frac{du}{da}\right) + v \frac{d}{da}\left(\Theta \frac{dv}{da}\right)\right] + \dot{\vartheta}^2\left[u \frac{d}{da}\left(\Theta \frac{dv}{da}\right) - v \frac{d}{da}\left(\Theta \frac{du}{da}\right)\right] \\ &\quad + \lambda_0\left[\sin \alpha_0 \frac{d}{da}\left(\Theta \frac{du}{da}\right) - \cos \alpha_0 \frac{d}{da}\left(\Theta \frac{dv}{da}\right)\right] \\ &\quad + \sin \vartheta\left[U \frac{d}{da}\left(\Theta \frac{du}{da}\right) + V \frac{d}{da}\left(\Theta \frac{dv}{da}\right)\right] \\ &\quad + \cos \vartheta\left[U \frac{d}{da}\left(\Theta \frac{dv}{da}\right) - V \frac{d}{da}\left(\Theta \frac{du}{da}\right)\right] = 0. \end{aligned}$$

Diese Relation, in welcher $u$, $v$, $\Theta$ Funktion von $a$ allein, $\vartheta$, $\lambda_0$ Funktionen von $t$ allein und $U$, $V$ Funktionen von $x_1$, $y_1$, $\vartheta$, $a$, $t$ oder von $\Theta \frac{du}{da}$, $\Theta \frac{dv}{da}$, $\vartheta$, $a$, $t$ sind, kann auf zweierlei Weise erfüllt werden. Entweder man setzt die Kurve, welche der Faden bildet, die Dichte und das Gesetz der Rotationsbewegung als bekannt vor-

aus und sucht die zugehörigen Kräfte zu bestimmen, oder aber man gibt die letzteren und sucht die Gestalt und Dichte des Fadens sowie das Bewegungsgesetz zu bestimmen.

Was den ersten Fall angeht, so sieht man, daß, wenn $u$, $v$, $\Theta$ in Funktion von $a$, und $\vartheta$ in Funktion von $t$ beliebig angenommen werden, die Funktionen $U$, $V$ noch nicht vollständig bestimmt sind, so daß noch eine derselben beliebig gewählt werden kann, d. h. von der äußeren Kraft kann entweder die Größe oder die Richtung beliebig angenommen werden.

Indem wir von der zweiten Annahme ausgehen, daß nämlich die Gestalt des Fadens nicht gegeben sei, wollen wir in den folgenden Paragraphen eine Anzahl besonderer Fälle behandeln.

## § 3.

## Über die Rotation des homogenen Fadens, wenn keine äußeren Kräfte wirken.

Wenn äußere Kräfte nicht vorhanden sind und die Dichte des Fadens konstant, etwa $= 1$ ist, hat man zu setzen

$$U = V = 0, \quad \Theta = 1,$$

und es folgt aus (10)

$$(11) \qquad \ddot{\vartheta}\left[u\frac{d^2u}{da^2} + v\frac{d^2v}{da^2}\right] + \dot{\vartheta}^2\left[u\frac{d^2v}{da^2} - v\frac{d^2u}{da^2}\right] + \\ + \lambda_0\left[\sin\alpha_0\frac{d^2u}{da^2} - \cos\alpha_0\frac{d^2v}{da^2}\right] = 0.$$

Diese Gleichung hat die Form (1). Man hat also nach § 1 zwei Fälle zu unterscheiden:

*1. Fall:* Die Relation (11) wird gelöst durch die Gleichungen:

$$\begin{cases} u\dfrac{d^2u}{da^2} + v\dfrac{d^2v}{da^2} = k_1\left(\sin\alpha_0\dfrac{d^2u}{da^2} - \cos\alpha_0\dfrac{d^2v}{da^2}\right) \\ u\dfrac{d^2v}{da^2} - v\dfrac{d^2u}{da^2} = k_2\left(\sin\alpha_0\dfrac{d^2u}{da^2} - \cos\alpha_0\dfrac{d^2v}{da^2}\right) \\ k_1\ddot{\vartheta} + k_2\dot{\vartheta}^2 + \lambda_0 = 0, \end{cases}$$

also

$$\frac{d^2u}{da^2}(u - k_1\sin\alpha_0) + \frac{d^2v}{da^2}(v + k_1\cos\alpha_0) = 0$$

$$\frac{d^2u}{da^2}(-v - k_2\sin\alpha_0) + \frac{d^2v}{da^2}(u + k_2\cos\alpha_0) = 0.$$

Hiezu kommt noch die Bedingung der Unausdehnbarkeit

$$\left(\frac{d^2u}{da^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2v}{da^2}\right)^2 = 1. \tag{8a}$$

Wir wollen nun zeigen, daß diese drei Relationen nicht miteinander verträglich sind. Zu diesem Zweck setzen wir:

$$p = u + k_2 \cos \alpha_0 \qquad m = -k_1 \sin \alpha_0 - k_2 \cos \alpha_0$$
$$q = v + k_2 \sin \alpha_0 \qquad n = \quad k_1 \cos \alpha_0 - k_2 \sin \alpha_0$$

und erhalten

$$(p + m)\frac{d^2p}{da^2} + (q + n)\frac{d^2q}{da^2} = 0$$

$$p\frac{d^2q}{da^2} - q\frac{d^2p}{da^2} = 0$$

$$\left(\frac{d^2p}{da^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2q}{da^2}\right)^2 = 1.$$

Aus diesen Gleichungen ergeben sich die folgenden:

$$p(p + m) + q(q + n) = 0$$

$$\frac{d^2p}{da^2} = -\frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2}}$$

$$\frac{d^2q}{da^2} = \frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2}}.$$

Setzt man

$$p = R \cos \Phi, \qquad q = R \sin \Phi,$$

so folgt aus den beiden letzten Gleichungen:

$$R^2\frac{d\Phi}{da} = B, \quad \frac{1}{2}\left[\left(\frac{dR}{da}\right)^2 + R^2\left(\frac{d\Phi}{da}\right)^2\right] = R + C,$$

wo $B$, $C$ Integrationskonstanten sind. Ferner folgt aus der ersten Gleichung

$$R = -(m \cos \Phi + n \sin \Phi)$$

$$\frac{dR}{da} = \quad (m \sin \Phi - n \cos \Phi)\frac{d\Phi}{da}.$$

Die Elimination von $\frac{dR}{da}$, $\Phi$, $\frac{d\Phi}{da}$ aus diesen und den obigen Gleichungen ergibt:

$$\frac{1}{2}(m^2 + n^2)B^2 = R^5 + CR^4,$$

d. h. es ist

$$R = \text{const}, \quad \text{somit auch} \quad \Phi = \text{const}$$

und

$$u = \text{const}, \qquad v = \text{const}.$$

*2. Fall:* Die Relation (11) wird nach § 1 auch durch folgende Gleichungen erfüllt:

$$\begin{cases} k_1\left[u\frac{d^2u}{da^2}+v\frac{d^2v}{da^2}\right]+k_2\left[u\frac{d^2v}{da^2}-v\frac{d^2u}{da^2}\right]+k_3\left[\sin\alpha_0\frac{d^2u}{da^2}-\cos\alpha_0\frac{d^2v}{da^2}\right]=0 \\ k_2\ddot{\vartheta}=k_1\dot{\vartheta}^2 \\ k_3\ddot{\vartheta}=k_1\lambda_0\,. \end{cases}$$

Aus der ersten Gleichung folgt:

$$\frac{d^2u}{da^2}(-k_1u+k_2v-k_3\sin\alpha_0)=\frac{d^2v}{da^2}(k_1v+k_2u-k_3\cos\alpha_0)$$

und hieraus mit Hilfe von (8a):

$$(12)\quad \begin{cases} \frac{d^2u}{da^2}=\frac{k_2u+k_1v-k_3\cos\alpha_0}{\pm[(k_2u+k_1v-k_3\cos\alpha_0)^2+(-k_1u+k_2v-k_3\sin\alpha_0)^2]^{1/2}} \\ \frac{dv^2}{da^2}=\frac{-k_1u+k_2v-k_3\sin\alpha_0}{\pm[(k_2u+k_1v-k_3\cos\alpha_0)^2+(-k_1u+k_2v-k_3\sin\alpha_0)^2]^{1/2}}\,. \end{cases}$$

Durch diese Gleichungen ist die Gestalt des Fadens definiert. Die Gleichung:

$$(13)\qquad \ddot{\vartheta}=m\dot{\vartheta}^2,$$

wo $\frac{k_1}{k_2}=m$ gesetzt wurde, ergibt, wenn $B$, $C$ Integrationskonstanten sind:

$$(13a)\qquad \dot{\vartheta}=-\frac{1}{m(t+B)},\quad \vartheta=\frac{1}{m}[C-\log(t+B)]\,.$$

Für die Spannung findet man aus (9):

$$\lambda=\mp\frac{\dot{\vartheta}^2}{k_2}[(k_2u+k_1v-k_3\cos\alpha_0)^2+(-k_1u+k_2v-k_3\sin\alpha_0)^2]^{1/2}.$$

Hieraus ist ersichtlich, daß das obere Wurzelzeichen in (12) einer negativen, das untere einer positiven Spannung entspricht.

Wird ein ebener, homogener, biegsamer Faden, welcher anfänglich die durch (12) definierte Gestalt besitzt, in die durch (13a) definierte Rotationsbewegung versetzt, so behält er diese Gestalt, obgleich die Rotationsbewegung ungleichförmig ist.[1])

Notwendig ist dabei nur, daß die nötigen Endspannungen angebracht werden. Das aber wird erreicht, indem man sich die Enden des Fadens an einer sich wie der Faden drehenden Ebene befestigt denkt.

1) Die Frage nach der Stabilität des Gleichgewichts habe ich nicht entscheiden können.

Wenn in der Relation (11) Produkte verschwinden, so erhält man, wie leicht einzusehen, nichts, was nicht schon in dem Bisherigen enthalten wäre. Ist z. B.

$$\sin \alpha_0 \frac{d^2u}{da^2} - \cos \alpha_0 \frac{d^2v}{da^2} = 0,$$

so folgt

$$\frac{d^2u}{da^2} = \cos \alpha_0, \quad \frac{d^2v}{da^2} = \sin \alpha_0.$$

Ferner folgt aus (11)

$$\ddot{\vartheta} = m\dot{\vartheta}^2,$$

$$m\left[u\frac{d^2u}{da^2} + v\frac{d^2v}{da^2}\right] + \left[u\frac{d^2v}{d^2a} - v\frac{d^2u}{da^2}\right] = 0.$$

Benützt man nun die Werte von $\frac{d^2u}{da^2}$ und $\frac{d^2v}{da^2}$ und differentiiert diese Gleichung zweimal, so ergibt sich

$$m = 0.$$

Der Faden hat somit die Gestalt einer Geraden, welche durch den Ursprung geht und gleichförmig rotiert.

Die Gleichungen (12) lassen sich auf eine andere Form bringen. Man dividiere die rechten Seiten, Zähler und Nenner, durch $k_2$ und setze:

$$\frac{k_1}{k_2} = m = \operatorname{tg} \varepsilon$$

und

$$u + mv - \frac{k_3}{k_2} \cos \alpha_0 = p + mq$$

$$v - mu - \frac{k_3}{k_2} \sin \alpha_0 = q - mp$$

oder

$$(14) \qquad \begin{cases} u = p + \dfrac{k_3}{k_2} \cos \varepsilon \cos (\alpha_0 + \varepsilon) \\ v = q + \dfrac{k_3}{k_2} \cos \varepsilon \sin (\alpha_0 + \varepsilon). \end{cases}$$

Man erhält daher die Kurve $(u, v)$ aus der Kurve $(p, q)$ durch eine Parallelverschiebung, welche jedoch auf die Kurve $(x_1, y_1)$ keinen Einfluß hat, da

$$\frac{du}{da} = \frac{dp}{da} = x_1, \quad \frac{dv}{da} = \frac{dq}{da} = y_1.$$

Die Gleichungen (12) lauten in $p$, $q$:

$$(12a) \qquad \begin{cases} \dfrac{d^2p}{da^2} = \dfrac{p + mq}{\pm\sqrt{1 + m^2}\sqrt{p^2 + q^2}} \\ \dfrac{d^2q}{da^2} = \dfrac{q - mp}{\pm\sqrt{1 + m^2}\sqrt{p^2 + q^2}} \end{cases}$$

Denkt man sich in (12a) $a$ durch $t$ ersetzt, so sieht man, daß diese Gleichungen die Bahn definieren, welche ein Punkt von der Masse 1 unter dem Einfluß einer Kraft 1 beschreibt, welche mit dem Radiusvektor den konstanten Winkel $\varepsilon$ bildet.

Was die Vorzeichen der Nenner betrifft, so können wir sie $\sqrt{1+m^2}$ beigeben und brauchen dann nur das positive Zeichen zu nehmen, denn da $\sqrt{1+m^2} = \frac{1}{\cos\varepsilon}$ ist, so erhalten wir das negative Zeichen, indem wir $\varepsilon$ zwischen $\frac{\pi}{2}$ und $\frac{3\pi}{2}$, und das positive Zeichen, indem wir $\varepsilon$ zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ bzw. zwischen $\frac{3\pi}{2}$ und $2\pi$ wählen. Wir erhalten daher das negative Zeichen stets dann, wenn die Kraft, welche an dem Massenpunkt angreift, *gegen* den Ursprung und das positive Zeichen, wenn sie vom Ursprung *weg* gerichtet ist. Gehen wir wieder zum Faden über, so müssen wir, indem wir das positive Zeichen wählen, setzen:

$$\lambda = -\frac{\dot{\vartheta}^2}{\cos\varepsilon}\sqrt{p^2+q^2}.$$

In einem speziellen Fall lassen sich die Gleichungen (12a) auf Quadraturen zurückführen. Ist $\varepsilon = \pi$, so wird $m = 0$ und nach (13) $\ddot{\vartheta} = 0$, d. h. die Winkelgeschwindigkeit ist konstant. Wir erhalten daher das Problem von Clebsch (S. 1):

> Die aus der Gleichgewichtskurve eines ebenen, homogenen Fadens, der unter dem Einfluß einer Zentrifugalkraft steht, durch die Substitution
>
> $$u = \int_{a_0}^{a} x_1\, da, \quad v = \int_{a_0}^{a} y_1\, da$$
>
> hervorgehende Kurve $(u, v)$ ist die Bahn eines Punktes von der Masse 1, auf welchen die Zentralkraft 1 wirkt.

Setzt man in (12a) $m = 0$, so folgt:

$$(15) \qquad \begin{cases} \dfrac{d^2p}{da^2} = \dfrac{-p}{\sqrt{p^2+q^2}} \\ \dfrac{d^2q}{da^2} = \dfrac{-q}{\sqrt{p^2+q^2}} \end{cases} \qquad \lambda = \dot{\vartheta}^2\sqrt{p^2+q^2}.$$

Es gelten nun die dem Prinzip der lebendigen Kraft und dem Prinzip der Erhaltung der Flächenräume entsprechenden Sätze:

$$(15\,a)\qquad \begin{cases} \frac{1}{2}\left[\left(\frac{dp}{da}\right)^2+\left(\frac{dq}{da}\right)^2\right] = -\sqrt{p^2+q^2}+C \\ p\,\frac{dq}{da} - q\,\frac{dp}{da} = D, \end{cases}$$

($C$, $D$ sind Konstanten).

Hieraus folgen einige Beziehungen zwischen der Kurve $(p, q)$ und der Kurve $(x_1, y_1)$. Sind $R$, $\Phi$ Polarkoordinaten der Kurve $(p, q)$ und $r$, $\varphi$ Polarkoordinaten der Kurve $(x_1, y_1)$, so ist

$$\left(\frac{dp}{da}\right)^2+\left(\frac{dq}{da}\right)^2 = r^2.$$

Damit folgt aus (15a), daß der Fahrstrahl der Kurve $(p, q)$ mit demjenigen der Kurve $(x_1, y_1)$ durch die Beziehung

$$(16)\qquad R = C - \frac{r^2}{2}$$

verbunden ist. Ferner folgt aus (15a):

$$(17)\qquad R^2\frac{d\Phi}{da} = D.$$

Durchwandert man auf der Kurve $(x_1, y_1)$ gleiche Strecken, so überstreicht der Radiusvektor nach dem Punkte $(p, q)$ gleiche Flächen.

Bedeuten $E$ und $F$ Konstanten, so werden die allgemeinen Integrale der Gleichungen (15):

$$(15\,b)\qquad \begin{cases} a = E + \int \frac{R\,dR}{[2R^2(-R+C)-D^2]^{1/2}}, \\ \Phi = F + \int \frac{D\,dR}{R[2R^2(-R+C)-D^2]^{1/2}}, \\ x_1 = \frac{d}{da}(R\cos\Phi), \quad y_1 = \frac{d}{da}(R\sin\Phi). \end{cases}$$

Für die Spannung ergibt sich:

$$\lambda = \dot{\vartheta}^2 R = \dot{\vartheta}^2\left[C - \frac{r^2}{2}\right],$$

wo $C > \frac{r^2}{2}$ zu nehmen ist.

Die Einführung der Koordinaten $(p, q)$ führt zu einer einfachen Relation zwischen dem Krümmungsradius $\varrho$ der Kurve $(x_1, y_1)$ und ihrem Radiusvektor $r$. Ist $\alpha$ der Winkel, den die Tangente an die Kurve $(x_1, y_1)$ mit der $x_1$ Achse bildet, so hat man:

$$\frac{d^2p}{da^2} = \frac{dx_1}{da} = \cos\alpha, \quad \frac{d^2q}{da^2} = \frac{dy_1}{da} = \sin\alpha,$$

also durch Division der Gleichungen (15)

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \Phi,$$

oder mit Hilfe von (15)

$$\Phi = \alpha + \pi.$$

Damit wird aus (17)

$$R^2 \frac{d\alpha}{da} = D$$

und weil

$$\frac{d\alpha}{da} = \frac{1}{\varrho}$$

ist, so wird

$$\varrho = \frac{R^2}{D}$$

oder mit Hilfe von (16):

(18) $$\varrho = \frac{1}{D}\left[C - \frac{r^2}{2}\right]^2.$$

Der Krümmungsradius der Gleichgewichtskurve eines ebenen, homogenen, unausdehnbaren Fadens, welcher sich um einen Punkt der Ebene dreht und nur unter dem Einfluß der Zentrifugalkraft steht, ist eine ganze rationale Funktion des vom Drehpunkt aus gemessenen Fahrstrahls dieser Kurve.

Dieses Ergebnis, welches sich durch einige Rechnung auch aus den Resultaten von Clebsch herleiten läßt, bleibt nicht so einfach, wenn der Faden eine Raumkurve bildet. Versteht man unter $\varrho$ den Krümmungsradius der Kurve, welche durch Projektion dieser Raumkurve auf eine zur Drehachse senkrechte Ebene entsteht, so ergibt sich $\varrho$ als algebraische Funktion des Fahrstrahls der Projektion.

Kehren wir nun wieder zurück zu den Gleichungen (12a). Durch Division gewinnt man aus denselben

$$\frac{\frac{d^2q}{da^2}}{\frac{d^2p}{da^2}} = \frac{q - mp}{p + mq} = \frac{q - \operatorname{tg} \varepsilon p}{p + \operatorname{tg} \varepsilon q}.$$

Setzt man wieder $p = R \cos \Phi$, $q = R \sin \Phi$, so folgt

$$\Phi = \alpha + \varepsilon.$$

Der Polarwinkel der Kurve $(p, q)$ unterscheidet sich von dem Neigungswinkel der Tangente der Kurve $(x_1, y_1)$ gegen die $x_1$-Achse nur um den Winkel $\varepsilon$.

Ferner folgt

(19) $$\frac{1}{\varrho} = \frac{d\Phi}{da}.$$

Führt man in den Gleichungen (12a) die Polarkoordinaten $R$, $\Phi$ ein, so findet man:

$$(12b)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2R}{da^2} - R\left(\dfrac{d\Phi}{da}\right)^2 = \cos\varepsilon \\ 2\dfrac{dR}{da}\cdot\dfrac{d\Phi}{da} + R\dfrac{d^2\Phi}{da^2} = -\sin\varepsilon \end{cases} \qquad \lambda = -\frac{\dot{\vartheta}^2 R}{\cos\varepsilon}.$$

Aus der zweiten Gleichung folgt:

$$\frac{d}{da}\left(R^2\frac{d\Phi}{da}\right) = -\sin\varepsilon R,$$

oder wenn gesetzt wird:

$$(20)\qquad \int R\,da + A = \sigma, \quad R = \frac{d\sigma}{da} \quad (A = \text{const.})$$

$$\left(\frac{d\sigma}{da}\right)^2\frac{d\Phi}{da} = -\sin\varepsilon\sigma.$$

Die Elimination von $\Phi$ aus dieser und der ersten Gleichung in (12b) ergibt:

$$(21)\qquad \left(\frac{d\sigma}{da}\right)^3\frac{d^3\sigma}{da^3} - \cos\varepsilon\left(\frac{d\sigma}{da}\right)^3 - \sigma^2\sin^2\varepsilon = 0.$$

Diese Gleichung, in welcher nur noch $\sigma$ vorkommt, ist homogen und läßt ein partikuläres Integral zu von der Form

$$\sigma = m\cdot a^n.$$

Durch Substitution dieses Wertes erhält man:

$$m^4n^4(n-1)(n-2)a^{4n-6} - \cos\varepsilon m^3n^3a^{3n-3} - \sin^2\varepsilon m^2a^{2n} = 0.$$

Diese Gleichung wird erfüllt für $n = 3$, wenn $m$ der Gleichung

$$m^2\cdot 3^4\cdot 2 - \cos\varepsilon\cdot m\cdot 3^3 - \sin^2\varepsilon = 0$$

genügt, also den Wert

$$m = \frac{3\cos\varepsilon \pm \sqrt{9\cos^2\varepsilon + 8\sin^2\varepsilon}}{36}$$

besitzt, welcher stets reell ist. Ein partikuläres Integral der Differentialgleichung (21) ist daher

$$\sigma = m\cdot a^3,$$

somit nach (20)

$$R = 3ma^2$$

und

$$\frac{d\Phi}{da} = -\frac{\sin\varepsilon}{9ma},$$

also

$$\varrho = -\frac{9ma}{\sin\varepsilon}.$$

Der Krümmungsradius ist daher der Bogenlänge proportional, eine Eigenschaft, welche nur der logarithmischen Spirale zukommt. Ferner wird

$$\lambda = -\frac{\dot{\vartheta}^2}{\cos\varepsilon}\cdot 3ma^2,$$

d. h. die Spannung verschwindet im Pol der Spirale. Bildet man $p$, $q$ und sodann $x_1$, $y_1$, so sieht man, daß für $a = 0$ $x_1 = y_1 = 0$ wird, der Pol der Spirale ist somit Drehpunkt.

Wenn ein vollständig biegsamer, homogener, unausdehnbarer Faden von der Gestalt einer logarithmischen Spirale sich um den Pol der Spirale dreht mit einer Winkelgeschwindigkeit, welche proportional $\frac{1}{t+C}$ ist, so behält er während der Bewegung diese Gestalt bei, vorausgesetzt, daß am freien Ende die nötige Endspannung angreift.

Die Differentialgleichung (21) kann durch einige Substitutionen zurückgeführt werden auf Quadraturen und eine Differentialgleichung erster Ordnung vom Typus

$$y\frac{dy}{dx} + y = F(x),$$

wo $F(x)$ eine rationale Funktion von $\sqrt{x}$ ist.

Wir wollen nun die Gleichungen (12a) auf eine andere Form bringen. Sie lassen sich als simultanes System von vier Differentialgleichungen erster Ordnung zunächst in folgender Weise schreiben:

$$\frac{dp}{da} = x_1 \qquad \frac{dx_1}{da} = \frac{p + mq}{\sqrt{1+m^2}\cdot\sqrt{p^2+q^2}}$$
$$\frac{dq}{da} = y_1 \qquad \frac{dy_1}{da} = \frac{q - mp}{\sqrt{1+m^2}\cdot\sqrt{p^2+q^2}}.$$

Die Einführung der Polarkoordinaten $R$, $\Phi$ für $p$, $q$ und $r$, $\varphi$ für $x_1$, $y_1$ liefert:

(12c)
$$\begin{cases} \frac{dR}{da} = r\cos(\Phi - \varphi) \\ \frac{d\Phi}{da} = -\frac{r}{R}\sin(\Phi - \varphi) \\ \frac{dr}{da} = \cos(\Phi - \varphi - \varepsilon) \\ \frac{d\varphi}{da} = \frac{1}{r}\sin(\Phi - \varphi - \varepsilon). \end{cases}$$

Diese Gleichungen sind zu integrieren unter der Voraussetzung, daß für $a = a_0$

$$R = R_0, \quad \Phi = \Phi_0, \quad r = r_0, \quad \varphi = \varphi_0$$

werde.

Hiebei sind nun aber $R_0$ und $\Phi_0$ nicht beliebig; denn da nach (7) für $a = a_0$ $u = v = 0$ sein muß, so folgt aus (14) für $a = a_0$:

$$p_0 = -\frac{k_3}{k_2} \cos\varepsilon \cos(\alpha_0 + \varepsilon)$$

$$q_0 = -\frac{k_3}{k_2} \cos\varepsilon \sin(\alpha_0 + \varepsilon).$$

Es muß daher sein

$$R_0 = -\frac{k_3}{k_2} \cos\varepsilon, \quad \Phi_0 = \alpha_0 + \varepsilon.$$

Da nun aber nach S. 12

$$\lambda_0 = \frac{k_3}{k_2} \dot{\vartheta}^2,$$

so ist, wenn der Faktor $\frac{k_3}{k_2}$, durch welchen sich die Endspannung vom Quadrat der Winkelgeschwindigkeit unterscheidet, gewählt ist, auch $R_0$ bestimmt.

Die Gestalt der Fadenkurve ist daher bestimmt, wenn die Koordinaten $r_0$, $\varphi_0$ eines ihrer Punkte, die Neigung $\alpha_0$ der Tangente in diesem Punkte gegen die $x_1$-Achse und die Spannung $\lambda_0$ in diesem Punkt gegeben sind.

Beiläufig will ich noch Potenzreihen angeben, welche (12c) befriedigen. Wir führen eine neue Variable $t$ ein durch die Gleichung:

$$\frac{dt}{da} = \frac{1}{rR},$$

wodurch (12b) übergeht in:

$$(12\text{d}) \quad \begin{cases} \frac{dR}{dt} = r^2 R \cos(\Phi - \varphi), & \frac{dr}{dt} = rR \cos(\Phi - \varphi - \varepsilon) \\ \frac{d\Phi}{dt} = -r^2 \sin(\Phi - \varphi), & \frac{d\varphi}{dt} = R \sin(\Phi - \varphi - \varepsilon) \end{cases} \qquad \frac{da}{dt} = rR.$$

Dieses System wird erfüllt durch die Reihen:

$$R = R_0 + r_0^2 R_0 \cos\tau\,(t - t_0) + \\ + r_0^2 R_0 [r_0^2 + R_0 (\cos\tau \cos(\tau - \varepsilon) + \cos\varepsilon)] \cdot \frac{(t - t_0)^2}{2} + \cdots$$

$$\Phi = \Phi_0 - r_0^2 \sin\tau\,(t - t_0) + \\ + r_0^2 [r_0^2 \cos\tau \sin\tau - R_0 (\sin\tau \cos(\tau - \varepsilon) + \sin\varepsilon)] \cdot \frac{(t - t_0)^2}{2} + \cdots$$

$$r = r_0 + r_0 R_0 \cos(\tau - \varepsilon) \cdot (t - t_0) + \\ + r_0 R_0 [R_0 + r_0^2 \cos\varepsilon] \cdot \frac{(t - t_0)^2}{2} + \cdots$$

$$\varphi = \varphi_0 + R_0 \sin(\tau - \varepsilon) \cdot (t - t_0) - \\ - R_0[r_0^2 \sin\varepsilon + R_0 \cos(\tau - \varepsilon) \sin(\tau - \varepsilon)] \cdot \frac{(t - t_0)^2}{2} + \cdots$$

$$a = a_0 + r_0 R_0 (t - t_0) + r_0 R_0 [R_0 \cos(\tau - \varepsilon) + r_0^2 \cos\tau] \cdot \frac{(t - t_0)^2}{2} + \cdots,$$

wobei zur Abkürzung $\Phi_0 - \varphi_0 = \tau$ gesetzt wurde.

Um die Konvergenz dieser Reihen zu untersuchen, bedenken wir, daß die rechten Seiten der Gleichungen (12d), sowie die ersten Ableitungen derselben nach den Variablen reelle, eindeutige und stetige Funktionen sind für alle Werte der Variablen, welche z. B. den Ungleichungen genügen:

$$R - R_0 < 1, \quad r - r_0 < 1, \quad \Phi - \Phi_0 < 1, \quad \varphi - \varphi_0 < 1.$$

Ferner sind die rechten Seiten für alle Punkte des so abgegrenzten Gebiets $< (1 + r_0)^2 (1 + R_0)$.

Da nun $t$ rechts nicht vorkommt, so sind nach einem bekannten Satz von Cauchy die obigen Reihen konvergent für alle Werte von $t$ des Bereichs:

$$|t - t_0| < \frac{1}{(1 + r_0)^2 (1 + R_0)}.$$

Weil die rechte Seite im Endlichen nirgends verschwindet, so kann man die Reihen durch die ganze $t$-Ebene fortsetzen.

Singuläre Punkte der Differentialgleichungen (12c) sind $R_0 = 0$, $r_0 = 0$. Ist $R_0 = 0$, so verschwindet in dem zugehörigen Fadenpunkt die Spannung, ist $r_0 = 0$, so geht die Fadenkurve durch den Drehpunkt. Will man das Verhalten der Integrale in diesen Punkten untersuchen, so stößt man auf Schwierigkeiten, da in den rechten Seiten der Gleichungen (12c) die linearen Glieder fehlen (vgl. hierzu Horn, Gewöhnliche Differentialgleichungen beliebiger Ordnung, S. 330f.).

Wichtiger als die Reihen der S. 19 sind die nach Potenzen des Parameters $\varepsilon$ fortschreitenden Entwicklungen, welche wir in einem speziellen Fall aufstellen wollen (Horn, a. a. O., S. 298ff.). Wenn in (12c) $\varepsilon + \pi$ an Stelle von $\varepsilon$ geschrieben und unter $\varepsilon$ ein spitzer Winkel verstanden wird, so ist die Spannung positiv. Das so erhaltene System besitzt für $\varepsilon = 0$ ein partikuläres Integral:

$$R = m^2, \quad \Phi = \frac{a}{m} + \frac{3\pi}{2}, \quad r = m, \quad \varphi = \frac{a}{m}, \quad (m = \text{const.}).$$

Die Fadenkurve ist daher ein Kreis. Es soll nun (12c) durch Reihen befriedigt werden, welche für $\varepsilon = 0$ in diese Lösung übergehen und für $a = 0$ die Werte $R = m^2$, $\Phi = \frac{3\pi}{2}$, $r = m$, $\varphi = 0$

annehmen. Wir suchen also diejenige Gestalt des ungleichförmig rotierenden Fadens, welche der Kreisform des gleichförmig rotieren den Fadens entspricht. Zu diesem Zweck setzen wir:

$$R = m^2 + R_1, \quad \Phi = \frac{a}{m} + \frac{3\pi}{2} + \Phi_1, \quad r = m + r_1, \quad \varphi = \frac{a}{m} + \varphi_1$$

und erhalten

$$(22)\quad \begin{cases} \dfrac{dR_1}{da} = (m + r_1)\sin(\Phi_1 - \varphi_1) & \dfrac{dr_1}{da} = -\sin(\Phi_1 - \varphi_1 - \varepsilon) \\ \dfrac{d\Phi_1}{da} = -\dfrac{1}{m} + \dfrac{m + r_1}{m^2 + R_1}\cos(\Phi_1 - \varphi_1) & \dfrac{d\varphi_1}{da} = -\dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{m + r_1}\cos(\Phi_1 - \varphi_1 - \varepsilon), \end{cases}$$

wobei jetzt für $a = 0$ sein muß: $R_1 = \Phi_1 = r_1 = \varphi_1 = 0$. Nimmt man $m_1 < m$, so sind die rechten Seiten der Gleichungen (22) in Reihen entwickelbar, welche konvergieren für $|R_1| < m_1^2$, $|r_1| < m_1$. Man erhält:

$$\frac{dR_1}{da} = m\Phi_1 - m\varphi_1 + r_1\Phi_1 - r_1\varphi_1 + \cdots$$

$$\frac{d\Phi_1}{da} = \frac{r_1}{m^2} - \frac{R_1}{m^3} + \frac{R_1^2}{m^5} - \frac{r_1 R_1}{m^4} - \frac{1}{m}\frac{(\Phi_1 - \varphi_1)}{2} + \cdots$$

$$\frac{dr_1}{da} = -\Phi_1 + \varphi_1 + \varepsilon + \cdots$$

$$\frac{d\varphi_1}{da} = -\frac{r_1}{m^2} + \frac{r_1^2}{m^3} - \frac{1}{m}\frac{(\Phi_1 - \varphi_1 - \varepsilon)^2}{2} + \cdots.$$

Nun setzen wir:

$$R_1 = R'\varepsilon + R''\varepsilon^2 + R'''\varepsilon^3 + \cdots$$

$$\Phi_1 = \Phi'\varepsilon + \Phi''\varepsilon^2 + \Phi'''\varepsilon^3 + \cdots$$

$$r_1 = r'\varepsilon + r''\varepsilon^2 + r'''\varepsilon^3 + \cdots$$

$$\varphi_1 = \varphi'\varepsilon + \varphi''\varepsilon^2 + \varphi'''\varepsilon^3 + \cdots$$

und erhalten:

$$\varepsilon\frac{dR'}{da} + \varepsilon^2\frac{dR''}{da} + \cdots = \varepsilon(m\Phi' - m\varphi') + \varepsilon^2(m\Phi'' - m\varphi'' + r'\Phi' - r'\varphi') + \cdots$$

$$\varepsilon\frac{d\Phi'}{da} + \varepsilon^2\frac{d\Phi''}{da} + \cdots = \varepsilon\left(\frac{r'}{m^2} - \frac{R'}{m^3}\right) + \varepsilon^2\left(\frac{r''}{m^2} - \frac{R''}{m^3} + \frac{R'^2}{m^5} - \frac{r'R'}{m^4} - \frac{1}{m}\frac{(\Phi' - \varphi')^2}{2} + \cdots\right.$$

$$\varepsilon\frac{dr'}{da} + \varepsilon^2\frac{dr''}{da} + \cdots = \varepsilon(-\Phi' + \varphi' + 1) + \varepsilon^2(-\Phi'' + \varphi'') + \cdots$$

$$\varepsilon\frac{d\varphi'}{da} + \varepsilon^2\frac{d\varphi''}{da^2} + \cdots = -\varepsilon\frac{r'}{m^2} + \varepsilon^2\left(-\frac{r''}{m^2} - \frac{r'^2}{m^3} - \frac{1}{m}\frac{(\Phi' - \varphi' - 1)^2}{2}\right) + \cdots.$$

Durch Vergleichung der Koeffizienten von $\varepsilon$ gewinnt man hieraus Systeme von linearen Differentialgleichungen, welche zur Bestimmung der durch Striche bezeichneten Funktionen dienen. Das erste dieser Systeme lautet:

$$\frac{dR'}{da} = m\Phi' - m\varphi'$$
$$\frac{d\Phi'}{da} = \frac{r'}{m^2} - \frac{R'}{m^3}$$
$$\frac{dr'}{da} = -\Phi' + \varphi' + 1$$
$$\frac{d\varphi'}{da} = -\frac{r'}{m^2}.$$

Dieses System, welches unter der Voraussetzung zu integrieren ist, daß für $a = 0$

$$R' = \Phi' = r' = \varphi' = 0$$

ist, liefert:

$$R' = \frac{2}{3}ma - \frac{2\cdot\sqrt{3}}{9}m^2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{m}\cdot a\right)$$
$$\Phi' = \frac{4}{9} - \frac{1}{6}\frac{a^2}{m^2} - \frac{4}{9}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{m}\cdot a\right)$$
$$r' = \frac{a}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{9}m\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{m}\cdot a\right)$$
$$\varphi' = -\frac{2}{9} - \frac{1}{6}\frac{a^2}{m^2} + \frac{2}{9}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{m}\cdot a\right).$$

Es ergeben sich daher folgende Entwicklungen:

$$R = m^2 + \varepsilon\left[\frac{2}{3}ma - \frac{2\sqrt{3}}{9}m^2\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{m}\cdot a\right)\right] + \cdots$$
$$\Phi = \frac{3\pi}{2} + \frac{a}{m} + \varepsilon\left[\frac{4}{9} - \frac{1}{6}\frac{a^2}{m^2} - \frac{4}{9}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{m}\cdot a\right)\right] + \cdots$$
$$r = m + \varepsilon\left[\frac{a}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{9}m\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{m}\cdot a\right)\right] + \cdots$$
$$\varphi = \frac{a}{m} + \varepsilon\left[-\frac{2}{9} - \frac{1}{6}\frac{a^2}{m^2} + \frac{2}{9}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{m}\cdot a\right)\right] + \cdots.$$

Ist $M$ die größere der Zahlen

$$m + m_1, \quad \frac{1}{m} + \frac{1}{m - m_1},$$

so sind die rechten Seiten der Gleichungen (22) $< M$ in dem Bereich

$$|R_1| < m_1^2, \quad |r_1| < m_1.$$

Bewegt sich ferner $a$ in dem Intervall $0 \ldots A$ und ist $n$ die kleinere der beiden Zahlen $m_1^2$ und $m_1$, so konvergieren die obigen Entwicklungen für alle Werte von $\varepsilon$, welche der Ungleichung genügen

$$|\varepsilon| < \frac{\frac{n}{2}}{1 + 2e^{\frac{4MA}{n}}}.$$

§ 4.

## Über die Rotation des homogenen Fadens unter dem Einfluß spezieller Kräfte.

Bisher haben wir die äußeren Kräfte Null gesetzt. Es gibt jedoch auch Fälle, bei welchen ein ebener unausdehnbarer Faden unter dem Einfluß von Kräften rotiert, ohne seine Gestalt zu ändern, obgleich er als vollkommen biegsam vorausgesetzt wird.

Es soll nun zuerst untersucht werden, ob eine solche Bewegung unter dem Einfluß von Kräften möglich ist, deren Komponenten bezüglich des festen Systems reine Funktionen des Bogens sind.

Wir setzen:

$$U = A_1(a), \quad V = A_2(a),$$

wo $A_1$ und $A_2$ reine Funktionen von $a$ sind. Damit geht (10) über in:

$$(23)\quad \ddot{\vartheta}\left[u\frac{d^2u}{da^2}+v\frac{d^2v}{da^2}\right]+\dot{\vartheta}^2\left[u\frac{d^2v}{da^2}-v\frac{d^2u}{da^2}\right]+\lambda_0\left[\sin\alpha_0\frac{d^2u}{da^2}-\cos\alpha_0\frac{d^2v}{da^2}\right]$$
$$+\sin\vartheta\left[A_1\frac{d^2u}{da^2}+A_2\frac{d^2v}{da^2}\right]+\cos\vartheta\left[A_1\frac{d^2v}{da^2}-A_2\frac{d^2u}{da^2}\right]=0.$$

Diese Relation ist z. B. in folgenden Fällen erfüllt:

*1. Fall:* Damit die Kurve, welche der Faden bildet, bestimmt sei, ist zwischen $u$, $v$ eine Relation nötig, die Bestimmung der Funktionen $A_1$, $A_2$ erfordert zwei Relationen. Es müssen daher zwischen den Größen, welche reine Funktionen von $t$ sind, zwei lineare Relationen angenommen werden. Diese liefern das Gesetz der Rotation, sowie die Endspannung $\lambda_0$:

$$(23\,a)\quad \begin{cases} u\dfrac{d^2v}{da^2}-v\dfrac{d^2u}{da^2}+\alpha_1\left[u\dfrac{d^2u}{da^2}+v\dfrac{d^2v}{da^2}\right]+\beta_1\left[\sin\alpha_0\dfrac{d^2u}{da^2}-\cos\alpha_0\dfrac{d^2v}{da^2}\right]=0 \\ A_1\dfrac{d^2u}{da^2}+A_2\dfrac{d^2v}{da^2}+\alpha_2\left[u\dfrac{d^2u}{da^2}+v\dfrac{d^2v}{da^2}\right]+\beta_2\left[\sin\alpha_0\dfrac{d^2u}{da^2}-\cos\alpha_0\dfrac{d^2v}{da^2}\right]=0 \\ A_1\dfrac{d^2v}{da^2}-A_2\dfrac{d^2u}{da^2}+\alpha_3\left[u\dfrac{d^2u}{da^2}+v\dfrac{d^2v}{da^2}\right]+\beta_3\left[\sin\alpha_0\dfrac{d^2u}{da^2}-\cos\alpha_0\dfrac{d^2v}{da^2}\right]=0 \\ \ddot{\vartheta}-\alpha_1\dot{\vartheta}^2-\alpha_2\sin\vartheta-\alpha_3\cos\vartheta=0 \\ \lambda_0-\beta_1\dot{\vartheta}^2-\beta_2\sin\vartheta-\beta_3\cos\vartheta=0. \end{cases}$$

Die erste Gleichung ergibt die durch (12) definierte Kurve, die beiden nächsten liefern $A_1$ und $A_2$. Setzt man:

$$\alpha_2=-\alpha\cos\vartheta_0, \quad \alpha_3=\alpha\sin\vartheta_0,$$

so erhält man aus der vierten Gleichung:

$$\ddot{\vartheta}-\alpha_1\dot{\vartheta}^2+\alpha\sin(\vartheta-\vartheta_0)=0.$$

Wenn $\alpha_1$ eine negative und $\alpha$ eine positive Konstante ist, so sagt diese Gleichung aus, daß die Bewegung des Fadens erfolgt wie die eines Pendels von der Länge $\frac{g}{\alpha}$ in einem Mittel, dessen Widerstand dem Quadrat der Geschwindigkeit proportional ist. Setzt man

$$\vartheta - \vartheta_0 = \vartheta_1,$$

so lautet das Integral

$$t + C = \int \frac{d\vartheta_1}{e^{\alpha_1 \vartheta_1}\left[B + \frac{2\alpha e^{-2\alpha_1 \vartheta_1}}{4\alpha_1^2 + 1}(2\alpha_1 \sin \vartheta_1 + \cos \vartheta_1)\right]^{1/2}}.$$

Wird ein ebener, biegsamer, homogener Faden dem Einfluß von bestimmten nur vom Bogen abhängigen Kräften ausgesetzt, so kann er sich, ohne seine Gestalt zu ändern, wie ein Pendel bewegen, welches in einem Mittel schwingt, dessen Widerstand dem Quadrat der Geschwindigkeit proportional ist. Die Gestalt des Fadens ist dieselbe wie wenn keine Kräfte wirken. (Über die Endspannung vgl. S. 12.)

Wird in (23a)

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$

gesetzt, so folgt:

$$(23\,\text{b}) \quad \begin{cases} u\frac{d^2v}{da^2} - v\frac{d^2u}{da^2} + \beta_1\left[\sin\alpha_0\frac{d^2u}{da^2} - \cos\alpha_0\frac{d^2v}{da^2}\right] = 0 \\ A_1\frac{d^2u}{da^2} + A_2\frac{d^2v}{da^2} + \beta_2\left[\sin\alpha_0\frac{d^2u}{da^2} - \cos\alpha_0\frac{d^2v}{da^2}\right] = 0 \\ A_1\frac{d^2v}{da^2} - A_2\frac{d^2u}{da^2} + \beta_3\left[\sin\alpha_0\frac{d^2u}{da^2} - \cos\alpha_0\frac{d^2v}{da^2}\right] = 0. \end{cases}$$

Ferner:

$$\ddot{\vartheta} = 0, \quad \vartheta = mt + n,$$

die Rotation ist somit eine gleichförmige. Damit wird

$$\lambda_0 = \beta_1 \cdot m^2 + \beta_2 \sin(mt+n) + \beta_3 \cos(mt+n).$$

Die erste Gleichung in (23b) ergibt mit Hilfe der Unausdehnsamkeitsbedingung das System:

$$\frac{d^2u}{da^2} = \frac{u - \beta_1 \cos\alpha_0}{\pm[(u-\beta_1\cos\alpha_0)^2 + (v-\beta_1\sin\alpha_0)^2]^{1/2}}$$
$$\frac{d^2v}{da^2} = \frac{v - \beta_1 \sin\alpha_0}{\pm[(u-\beta_1\cos\alpha_0)^2 + (v-\beta_1\sin\alpha_0)^2]^{1/2}},$$

welches durch die Substitution:

$$u - \beta_1 \cos\alpha_0 = p, \quad v - \beta_1 \sin\alpha_0 = q$$

in (15) übergeht, sofern wir das negative Zeichen wählen. Die Kurve, welche der Faden bildet, ist daher dieselbe wie beim Problem von Clebsch. Setzt man:

$$\beta_2 = -k \sin \beta_0, \quad \beta_3 = -k \cos \beta_0$$

und führt außerdem Polarkoordinaten ein, so erhält man:

$$(24) \qquad \begin{cases} A_1 = -k \sin(\Phi - \alpha_0) \sin(\Phi + \beta_0) \\ A_2 = \quad k \sin(\Phi - \alpha_0) \cos(\Phi + \beta_0). \end{cases}$$

Für die Spannung ergibt sich aus (9) mit Benützung des obigen Werts für $\lambda_0$:

$$\lambda = m^2 R + k \cos(\Phi - mt - n - \alpha_0 + \beta_0)$$

und für die Komponenten der äußeren Kraft bezüglich des festen Systems:

$$X = \frac{dA_1}{da}, \quad Y = \frac{dA_2}{da}.$$

Da $X$, $Y$ reine Funktionen von $a$ sind, so hängt die Richtung der äußeren Kraft bezüglich des festen Systems von der Zeit nicht ab; während also der Faden rotiert, bleibt sich die an demselben Fadenpunkt angreifende Kraft stets parallel. Die Kurve, welche der Faden bildet, ist dieselbe, wie wenn keine Kräfte wirkten. Die Spannung aber hat sich der kräftefreien Bewegung gegenüber verändert. Da die Spannung von der Zeit abhängt, so kann der Fall eintreten, daß sie für einen und denselben Fadenpunkt periodisch ihr Zeichen wechselt.

Ein Faden, welcher mit gleichförmiger Geschwindigkeit rotiert und unter dem Einfluß von den durch (24) bestimmten, nur vom Bogen abhängenden Kräften steht, behält dieselbe Gestalt bei, wie wenn keine Kräfte vorhanden wären.

*2. Fall.* Im ersten Fall haben wir die Relation (23) durch drei lineare Relationen zwischen den $A_i$ und zwei zwischen den $T_i$ aufgelöst. Man kann aber auch zwischen den $A_i$ nur zwei, dagegen zwischen den $T_i$ drei lineare Relationen annehmen:

$$(25) \qquad \begin{cases} A_1 \frac{d^2u}{da^2} + A_2 \frac{d^2v}{da^2} + \alpha_1 \left[ u \frac{d^2u}{da^2} + v \frac{d^2v}{da^2} \right] + \beta_1 \left[ u \frac{d^2v}{da^2} - v \frac{d^2u}{da^2} \right] \\ \qquad + \gamma_1 \left[ \sin \alpha_0 \frac{d^2u}{da^2} - \cos \alpha_0 \frac{d^2v}{da^2} \right] = 0, \\ A_1 \frac{d^2v}{da^2} - A_2 \frac{d^2u}{da^2} + \alpha_2 \left[ u \frac{d^2u}{da^2} + v \frac{d^2v}{da^2} \right] + \beta^2 \left[ u \frac{d^2v}{da^2} - v \frac{d^2u}{da^2} \right] \\ \qquad + \gamma_2 \left[ \sin \alpha_0 \frac{d^2u}{da^2} - \cos \alpha_0 \frac{d^2v}{da^2} \right] = 0, \\ \ddot{\vartheta} - \alpha_1 \sin \vartheta - \alpha_2 \cos \vartheta = 0 \\ \dot{\vartheta}^2 - \beta_1 \sin \vartheta - \beta_2 \cos \vartheta = 0 \\ \lambda_0 - \gamma_1 \sin \vartheta - \gamma_2 \cos \vartheta = 0. \end{cases}$$

Aus den beiden ersten Gleichungen folgt, daß von den $A_1$, $A_2$ eins beliebig wählbar ist. Wählt man etwa $A_1$, so kann man $A_2$ eliminieren und erhält eine Differentialgleichung, welche mit Benützung der Unausdehnsamkeitsbedingung die Gleichung der Fadenkurve liefert. Man kann aber auch diese Kurve beliebig wählen, dann aber sind $A_1$ und $A_2$ beide bestimmt.

Die dritte Gleichung besitzt ein erstes Integral:

$$\frac{1}{2}\dot{\vartheta}^2 = -\alpha_1 \cos\vartheta + \alpha_2 \sin\vartheta + C.$$

Dies stimmt mit der vierten Gleichung überein, wenn gesetzt wird:

$$\beta_1 = 2\alpha_2, \quad \beta_2 = -2\alpha_1, \quad C = 0.$$

Setzt man ferner:

$$\alpha_1 = -\beta\cos\vartheta_0, \quad \alpha_2 = \beta\sin\vartheta_0, \quad \vartheta - \vartheta_0 = \vartheta_1,$$

so folgt:

$$\frac{1}{2}\dot{\vartheta}_1^2 = \beta\cos\vartheta_1$$

und diese Gleichung definiert eine gewöhnliche Pendelbewegung.

Sind die Kräfte, welche an einem ebenen, homogenen Faden angreifen, reine Funktion des Bogens, so kann der Faden unter ihrem Einfluß die Bewegung eines gewöhnlichen Pendels ausführen, ohne seine Gestalt zu ändern. Hiebei kann man entweder die Kurve, welche der Faden bildet, beliebig wählen, dann ist an jeder Stelle die Kraft der Größe und Richtung nach bestimmt, oder man kann von der Kraft entweder Größe oder Richtung beliebig wählen, dann aber ist die Kurve bestimmt.

Zu bemerken ist noch, daß die Schwerkraft in keinem dieser Fälle enthalten ist.

Wir wollen nun eine andere Annahme über die äußere Kraft machen: Die Komponenten der Kraft bezüglich des festen Systems seine reine Funktionen von $t$. In diesem Fall sind also die an den einzelnen Fadenpunkten zu einer und derselben Zeit wirkenden äußeren Kräfte parallel und gleich. Es sei:

$$X = T_1(t), \qquad Y = T_2(t),$$

also:

$$U = T_1(a - a_0), \qquad V = T_2(a - a_0),$$

damit folgt aus (10):

$$\ddot{\vartheta}\left[u\frac{d^2u}{da^2} + v\frac{d^2v}{da^2}\right] + \dot{\vartheta}^2\left[u\frac{d^2v}{da^2} - v\frac{d^2u}{da^2}\right] + \lambda_0\left[\sin\alpha_0\frac{d^2u}{da^2} - \cos\alpha_0\frac{d^2v}{da^2}\right]$$

$$+ [T_1\sin\vartheta - T_2\cos\vartheta](a-a_0)\frac{d^2u}{da^2} + [T_1\cos\vartheta + T_2\sin\vartheta](a-a_0)\frac{d^2v}{da^2} = 0.$$

Diese Relation erfüllen wir durch das System:

$$k_1\left[u\frac{d^2u}{da^2}+v\frac{d^2v}{da^2}\right]+k_2\left[u\frac{d^2v}{da^2}-v\frac{d^2u}{da^2}\right]+k_3\left[\sin\alpha_0\frac{d^2u}{da^2}-\cos\alpha_0\frac{d^2v}{da^2}\right]$$
$$+k_4(a-a_0)\frac{d^2u}{da^2}+k_5(a-a_0)\frac{d^2v}{da^2}=0$$

$$k_2\ddot{\vartheta}=k_1\dot{\vartheta}^2$$
$$k_3\ddot{\vartheta}=k_1\lambda_0$$
$$k_4\ddot{\vartheta}=k_1[T_1\sin\vartheta-T_2\cos\vartheta]$$
$$k_5\ddot{\vartheta}=k_1[T_1\cos\vartheta+T_2\sin\vartheta].$$

Aus der ersten Gleichung folgt:

$$\frac{d^2u}{da^2}[-k_1u+k_2v-k_3\sin\alpha_0-k_4(a-a_0)]=$$
$$=\frac{d^2v}{da^2}[k_1v+k_2u-k_3\cos\alpha_0+k_5(a-a_0)].$$

Nun setze man:

$$-k_1u+k_2v-k_3\sin\alpha_0-k_4(a-a_0)=-k_1p+k_2q$$
$$k_1v+k_2u-k_3\cos\alpha_0+k_5(a-a_0)=k_1q+k_2p$$

oder:

$$u=p-(a-a_0)\frac{k_1k_4+k_2k_5}{k_1^2+k_2^2}+k_3\frac{-k_1\sin\alpha_0+k_3\cos\alpha_0}{k_1^2+k_2^2}$$
$$v=q-(a-a_0)\frac{k_1k_5-k_2k_4}{k_1^2+k_2^2}+k_3\frac{k_2\sin\alpha_0+k_1\cos\alpha_0}{k_1^2+k_2^2},$$

somit:

$$x_1=\frac{du}{da}=\frac{dp}{da}-\frac{k_1k_4+k_2k_5}{k_1^2+k_2^2}$$
$$y_1=\frac{dv}{da}=\frac{dq}{da}-\frac{k_1k_5-k_2k_4}{k_1^2+k_2^2}.$$

Führt man die $p$, $q$ ein, so findet man wieder das System (12a). Wir erhalten daher in $p$, $q$ dieselbe Kurve wie bei der kräftefreien Bewegung. Dieser Kurve jedoch entspricht eine Kurve $(x_1, y_1)$, welche allerdings dieselbe Gestalt hat wie diejenige der kräftefreien Bewegung, welche sich aber von dieser Kurve durch eine Parallelverschiebung in dem sich drehenden System unterscheidet.

Ein ebener, homogener Faden kann unter dem Einfluß von bestimmten, nur von der Zeit abhängigen Kräften eine Rotationsbewegung ausführen, ohne seine Gestalt zu ändern. Bewegung und Gestalt sind dieselben, wie wenn keine Kräfte vorhanden wären. Der Faden ist jedoch dem Fall der kräftefreien Bewegung gegenüber in dem sich drehenden System parallel mit sich verschoben.

Auf S. 23 nahmen wir an, die Komponenten der äußeren Kraft bezüglich des *festen* Systems seien reine Funktionen des Bogens. Jetzt wollen wir annehmen, die Komponenten in bezug auf das *bewegliche* System seien reine Funktionen des Bogens.

Man hat somit, wenn $\frac{dA_1}{da}$, $\frac{dA_2}{da}$ diese Komponenten darstellen,

$$U = A_1 \cos\vartheta - A_2 \sin\vartheta$$
$$V = A_1 \sin\vartheta + A_2 \cos\vartheta .$$

Damit wird aus (10):

$$\ddot{\vartheta}\left[u\frac{d^2u}{da^2} + v\frac{d^2v}{da^2}\right] + \dot{\vartheta}^2\left[u\frac{d^2v}{da^2} - v\frac{d^2u}{da^2}\right] + \lambda_0\left[\sin\alpha_0\frac{d^2u}{da^2} - \cos\alpha_0\frac{d^2v}{da^2}\right]$$
$$+ A_1\frac{d^2v}{da^2} - A_2\frac{d^2u}{da^2} = 0.$$

Wir unterscheiden hiebei zwei Fälle:

*1. Fall:* Es mögen zwischen den $A_i$ zwei und zwischen den $T_i$ drei lineare Relationen angenommen werden:

$$\alpha_1\left[u\frac{d^2u}{da^2} + v\frac{d^2v}{da^2}\right] + \beta_1\left[\sin\alpha_0\frac{d^2u}{da^2} - \cos\alpha_0\frac{d^2v}{da^2}\right] + \left[u\frac{d^2v}{da^2} - v\frac{d^2u}{da^2}\right] = 0$$
$$\alpha_2\left[u\frac{d^2u}{da^2} + v\frac{d^2v}{da^2}\right] + \beta_2\left[\sin\alpha_0\frac{d^2u}{da^2} - \cos\alpha_0\frac{d^2v}{da^2}\right] + \left[A_1\frac{d^2v}{da^2} - A_2\frac{d^2u}{da^2}\right] = 0$$
$$\ddot{\vartheta} = \alpha_1\dot{\vartheta}^2 + \alpha_2$$
$$\lambda_0 = \beta_1\dot{\vartheta}^2 + \beta_2.$$

Die erste Gleichung führt wieder auf die Kurve der kräftefreien Bewegung, und die zweite sagt aus, daß von der Kraft entweder Größe oder Richtung beliebig wählbar ist. Die dritte Gleichung gibt integriert:

$$\vartheta = \frac{1}{\alpha_1}\left[D - \log\cos\sqrt{\alpha_1\alpha_2}\,(t + C)\right],$$

wobei $C$, $D$ Konstanten sind.

*2. Fall:* Nimmt man zwischen den $A_i$ nur eine Relation und zwischen den $T_i$ drei an, so sind die letzteren nur verträglich, wenn eine Konstante so gewählt wird, daß $\ddot{\vartheta}$ verschwindet. $\dot{\vartheta}$ und $\lambda_0$ werden damit konstant. $A_1$ und $A_2$ können beliebig gewählt werden. Ist dies geschehen, so ist die Gestalt des Fadens durch die Gleichung:

$$k_1\left[u\frac{d^2v}{da^2} - v\frac{d^2u}{da^2}\right] + k_2\left[\sin\alpha_0\frac{d^2u}{da^2} - \cos\alpha_0\frac{d^2v}{da^2}\right] + A_1\frac{d^2v}{da^2} - A_2\frac{d^2u}{da^2} = 0$$

bestimmt. Dieser Fall tritt z. B. ein, wenn der Faden gleichförmig rotiert und außerdem unter dem Einfluß einer Zentralkraft steht, deren Mittelpunkt sich im Drehpunkt befindet.

## § 5.
## Über die Rotation des heterogenen Fadens.

In § 3 und § 4 haben wir nur einen Faden von konstanter Dichte betrachtet. Im folgenden wollen wir nun die Dichte als Funktion des Bogens annehmen. Von äußeren Kräften möge wie in § 3 abgesehen werden. Setzt man in (10):

$$U = 0, \quad V = 0,$$

so folgt:

$$(26)\quad \ddot{\vartheta}\Big[u\frac{d}{da}\Big(\Theta\frac{du}{da}\Big)+v\frac{d}{da}\Big(\Theta\frac{dv}{da}\Big)\Big]+\dot{\vartheta}^2\Big[u\frac{d}{da}\Big(\Theta\frac{dv}{da}\Big)-v\frac{d}{da}\Big(\Theta\frac{du}{da}\Big)\Big]$$
$$+\lambda_0\Big[\sin\alpha_0\frac{d}{da}\Big(\Theta\frac{du}{da}\Big)-\cos\alpha_0\frac{d}{da}\Big(\Theta\frac{dv}{da}\Big)\Big]=0.$$

Diese Relation, in welcher die Klammern reine Funktionen von $a$, ihre Faktoren reine Funktionen von $t$ sind, kann in zwei Fällen erfüllt werden:

*1. Fall:*

$$(27)\quad \begin{cases} u\frac{d}{da}\Big(\Theta\frac{du}{da}\Big)+v\frac{d}{da}\Big(\Theta\frac{dv}{da}\Big)=k_1\Big[\sin\alpha_0\frac{d}{da}\Big(\Theta\frac{du}{da}\Big)-\cos\alpha_0\frac{d}{da}\Big(\Theta\frac{dv}{da}\Big)\Big] \\ u\frac{d}{da}\Big(\Theta\frac{dv}{da}\Big)-v\frac{d}{da}\Big(\Theta\frac{du}{da}\Big)=k_2\Big[\sin\alpha_0\frac{d}{da}\Big(\Theta\frac{du}{da}\Big)-\cos\alpha_0\frac{d}{da}\Big(\Theta\frac{dv}{da}\Big)\Big] \\ k_1\ddot{\vartheta}+k_2\dot{\vartheta}^2+\lambda_0=0. \end{cases}$$

Da

$$\frac{d}{da}\Big(\Theta\frac{du}{da}\Big)=\cos\alpha, \quad \frac{d}{da}\Big(\Theta\frac{dv}{da}\Big)=\sin\alpha,$$

so folgt aus den beiden ersten Gleichungen von (27) für $\alpha=\alpha_0$

$$u=0, \quad v=0,$$

so daß also die Bedingung, welcher die Variablen $u$, $v$ nach (7) unterworfen sind, nämlich für $a=a_0$ zu verschwinden, erfüllt ist.

Ist $\Theta$ eine Konstante, so kommen wir auf die Relationen von S. 10, welche nicht miteinander verträglich sind. Läßt man jedoch $\Theta(a)$ unbestimmt, so werden die beiden ersten Gleichungen in (27) miteinander verträglich und liefern mit Hilfe von (8) $u$, $v$ und $\Theta$ in Funktion von $a$. Aus (27) folgt:

$$\frac{d}{da}\Big(\Theta\frac{du}{da}\Big)(u-k_1\sin\alpha_0)+\frac{d}{da}\Big(\Theta\frac{dv}{da}\Big)(v+k_1\cos\alpha_0)=0$$
$$\frac{d}{da}\Big(\Theta\frac{du}{da}\Big)(-v-k_2\sin\alpha_0)+\frac{d}{da}\Big(\Theta\frac{dv}{da}\Big)(u+k_2\cos\alpha_0)=0.$$

Nun setze man:

$$p = u + k_2 \cos\alpha_0 \qquad m = -k_2 \cos\alpha_0 - k_1 \sin\alpha_0$$
$$q = v + k_2 \sin\alpha_0 \qquad n = -k_1 \cos\alpha_0 - k_2 \sin\alpha_0.$$

Damit wird:

$$(28)\quad \begin{cases} (p+m)\frac{d}{da}\left(\Theta\frac{dp}{da}\right) + (q+n)\frac{d}{da}\left(\Theta\frac{dq}{da}\right) = 0 \\ p\frac{d}{da}\left(\Theta\frac{dq}{da}\right) - q\frac{d}{da}\left(\Theta\frac{dp}{da}\right) = 0 \\ \left[\frac{d}{da}\left(\Theta\frac{dp}{da}\right)\right]^2 + \left[\frac{d}{da}\left(\Theta\frac{dq}{da}\right)\right]^2 = 1. \end{cases}$$

Da die Differentialquotienten nicht beide gleichzeitig verschwinden können, so kann man sie eliminieren und erhält

$$p(p+m) + q(q+n) = 0.$$

Bedeutet $B$ eine Konstante, so folgt aus der zweiten Gleichung in (28) durch Integration:

$$\Theta\left(p\frac{dq}{da} - q\frac{dp}{da}\right) = B,$$

also:

$$\Theta = \frac{B}{p\frac{dq}{da} - q\frac{dp}{da}}.$$

Es sind nun noch die Gleichungen

$$p(p+m) + q(q+n) = 0$$
$$\left[\frac{d}{da}\left(\Theta\frac{dp}{da}\right)\right]^2 + \left[\frac{d}{da}\left(\Theta\frac{dq}{da}\right)\right]^2 = 1$$

zu erfüllen. Die erstere stellt im $(p, q)$ System einen Kreis dar; um sie zu befriedigen, setzen wir:

$$p + \frac{m}{2} = \sigma\sin\varphi \qquad \frac{m}{2} = -\sigma\sin\varphi_0$$
$$q + \frac{n}{2} = -\sigma\cos\varphi \qquad \frac{n}{2} = \sigma\cos\varphi_0,$$

wo $\sigma$ und $\varphi_0$ Konstanten sind, somit

$$p = \sigma(\sin\varphi + \sin\varphi_0) \qquad \frac{dp}{da} = \sigma\cos\varphi\frac{d\varphi}{da}$$
$$q = -\sigma(\cos\varphi + \cos\varphi_0) \qquad \frac{dq}{da} = \sigma\sin\varphi\frac{d\varphi}{da},$$

also:

$$\Theta = \frac{B}{\sigma^2\frac{d\varphi}{da}[1 + \cos(\varphi - \varphi_0)]}.$$

Ferner ist

$$\frac{d}{da}\left(\Theta\frac{dp}{da}\right) = -\frac{B[\sin\varphi + \sin\varphi_0]}{\sigma[1+\cos(\varphi-\varphi_0)]^2}\cdot\frac{d\varphi}{da}$$

$$\frac{d}{da}\left(\Theta\frac{dq}{da}\right) = \frac{B[\cos\varphi + \cos\varphi_0]}{\sigma[1+\cos(\varphi-\varphi_0)]^2}\cdot\frac{d\varphi}{da}.$$

Geht man damit in die dritte Gleichung von (28), so folgt:

$$\frac{2B^2}{\sigma^2}\left(\frac{d\varphi}{da}\right)^2 = [1+\cos(\varphi-\varphi_0)]^3,$$

also, wenn $C$ eine Konstante bedeutet:

$$a + C = \int \frac{\sqrt{2}\cdot B\cdot d\varphi}{\sigma[1+\cos(\varphi-\varphi_0)]^{3/2}}. \tag{29}$$

Da nun aber

$$x_1 = \Theta\frac{dp}{da}, \quad y_1 = \Theta\frac{dq}{da},$$

so wird,

$$x_1 = \frac{B\cos\varphi}{\sigma[1+\cos(\varphi-\varphi_0)]}, \quad y_1 = \frac{B\sin\varphi}{\sigma[1+\cos(\varphi-\varphi_0)]}$$

oder, wenn

$$x_1 = r\cos\varphi, \quad y_1 = r\sin\varphi$$

gesetzt wird,

$$r = \frac{B}{\sigma[1+\cos(\varphi-\varphi_0)]}.$$

Dies aber ist die Gleichung einer Parabel in Polarkoordinaten, deren Pol der Brennpunkt ist. Rechnet man $\varphi$ vom Scheitel aus, so wird $\varphi_0 = 0$, und man erhält als Gleichung der Fadenkurve, bezogen auf den Drehpunkt als Pol:

$$r = \frac{B}{\sigma[1+\cos\varphi]}.$$

Damit wird

$$\Theta = \frac{r}{\sigma\dfrac{d\varphi}{da}},$$

woraus ersichtlich ist, daß, wenn $\sigma$ positiv ist, auch $\frac{d\varphi}{da}$ positiv ist. Man hat also in (29) das positive Wurzelzeichen zu nehmen. Mit Benützung des Wertes von $\frac{d\varphi}{da}$ erhält man:

$$\Theta = \frac{\sqrt{2}\,r^{5/2}}{\sqrt{B\sigma}},$$

also folgt für die Dichte:

$$\Psi = \frac{\sqrt{B\sigma}}{\sqrt{2}\,r^{5/2}}, \tag{I}$$

d. h. die Dichte erreicht ihren größten Wert im Scheitel der Parabel, von da an nimmt sie mehr und mehr ab und verschwindet im Un-

endlichen. Aus der dritten Gleichung in (27) folgt, daß die Winkelgeschwindigkeit in Funktion von $t$ beliebig gewählt werden kann, ist dies geschehen, so ist die Endspannung $\lambda_0$ bestimmt.

Wird ein unausdehnbarer, vollständig biegsamer Faden, welcher das unter (I) angegebene Dichtegesetz besitzt, in Gestalt einer Parabel auf eine horizontale Ebene gelegt und werden ferner die Enden des Fadens mit der Ebene fest verbunden, so kann die Ebene um eine durch den Brennpunkt der Parabel gehende, zur Ebene senkrechte Achse mit beliebig variierender Winkelgeschwindigkeit in Umdrehung versetzt werden, ohne daß der Faden seine Gestalt verändert. Dies ist, sofern von Kräften abgesehen wird, der einzige Fall, bei welchem die Winkelgeschwindigkeit in Funktion der Zeit beliebig gewählt werden kann.

Dieses Ergebnis kann auch aus den natürlichen Gleichungen der Fadenbewegung abgeleitet werden. Wir gehen zu diesem Zweck aus von dem System (6):

$$\Psi(-y_1\ddot{\vartheta} - x_1\dot{\vartheta}^2) = \frac{\partial}{\partial a}\left(\lambda\frac{dx_1}{da}\right)$$

$$\Psi(\ \ x_1\ddot{\vartheta} - y_1\dot{\vartheta}^2) = \frac{\partial}{\partial a}\left(\lambda\frac{dy_1}{da}\right),$$

hieraus folgt, wenn

$$\frac{d\alpha}{da} = \frac{1}{\varrho}$$

gesetzt wird:

$$\Psi[(-y_1\ddot{\vartheta} - x_1\dot{\vartheta}^2)\cos\alpha + (x_1\ddot{\vartheta} - y_1\dot{\vartheta}^2)\sin\alpha] = \frac{\partial\lambda}{\partial a}$$

$$\varrho\,\Psi[(\ \ y_1\ddot{\vartheta} + x_1\dot{\vartheta}^2)\sin\alpha + (x_1\ddot{\vartheta} - y_1\dot{\vartheta}^2)\cos\alpha] = \lambda$$

oder für

$$x_1 = r\cos\varphi, \quad y_1 = r\sin\varphi$$

$$\frac{\partial\lambda}{\partial a} = \ \ \Psi r[\ddot{\vartheta}\sin(\alpha-\varphi) - \dot{\vartheta}^2\cos(\alpha-\varphi)]$$

$$\lambda = \varrho\,\Psi r[\ddot{\vartheta}\cos(\alpha-\varphi) + \dot{\vartheta}^2\sin(\alpha-\varphi)], \tag{30}$$

also muß sein

$$\Psi r[\ddot{\vartheta}\sin(\alpha-\varphi) - \dot{\vartheta}^2\cos(\alpha-\varphi)] = \ddot{\vartheta}\,\frac{d}{da}[\varrho\,\Psi r\cos(\alpha-\varphi)]$$
$$+ \dot{\vartheta}^2\frac{d}{da}[\varrho\,\Psi r\sin(\alpha-\varphi)].$$

Diese Gleichung wird, wenn zwischen $\ddot{\vartheta}$ und $\dot{\vartheta}^2$ keine lineare Relation mit konstanten Koeffizienten besteht, nur erfüllt durch

$$(31)\qquad \begin{cases} \Psi r \sin(\alpha-\varphi) = \dfrac{d}{da}[\varrho \Psi r \cos(\alpha-\varphi)] \\ -\Psi r \cos(\alpha-\varphi) = \dfrac{d}{da}[\varrho \Psi r \sin(\alpha-\varphi)]. \end{cases}$$

Hieraus folgt:

$$\cos(\alpha-\varphi)\frac{d}{da}[\varrho \Psi r \cos(\alpha-\varphi)] + \sin(\alpha-\varphi)\frac{d}{da}[\varrho \Psi r \sin(\alpha-\varphi)] = 0.$$

Diese Gleichung besitzt das Integral:

$$[\varrho \Psi r \cos(\alpha-\varphi)]^2 + [\varrho \Psi r \sin(\alpha-\varphi)]^2 = 4c^2,$$

daher

$$\Psi = \frac{2c}{\varrho r}$$

und somit aus (31)

$$2c\frac{d}{da}[\cos(\alpha-\varphi)] = \frac{2c}{\varrho}\sin(\alpha-\varphi)$$

$$2c\frac{d}{da}[\sin(\alpha-\varphi)] = -\frac{2c}{\varrho}\cos(\alpha-\varphi)$$

oder

$$\varrho \sin(\alpha-\varphi)\left[\frac{d\alpha}{da}-\frac{d\varphi}{da}\right] = -\sin(\alpha-\varphi)$$

$$\varrho \cos(\alpha-\varphi)\left[\frac{d\alpha}{da}-\frac{d\varphi}{da}\right] = -\cos(\alpha-\varphi),$$

also

$$\varrho\left(\frac{1}{\varrho}-\frac{d\varphi}{da}\right) = -1$$

oder

$$\frac{d\varphi}{da} = 2\frac{d\alpha}{da}$$

$$\alpha = \frac{\varphi - C}{2}.$$

Aus dieser Gleichung folgt durch eine einfache Integration

$$r = \frac{D}{\sin^2\dfrac{\varphi+C}{2}} = \frac{2D}{1-\cos(\varphi+C)}.$$

Setzt man nun

$$c = \sigma, \quad D = \frac{B}{2\sigma}, \quad C = -(\pi+\varphi_0),$$

so erhält man wie auf S. 31:

$$r = \frac{B}{\sigma[1+\cos(\varphi-\varphi_0)]}.$$

Aus (30) ergibt sich

$$\lambda = 2c[-\ddot{\vartheta}\cos(\alpha-\varphi_0) + \dot{\vartheta}^2\sin(\alpha-\varphi_0)].$$

Ist hierin $\dot{\vartheta}$ in Funktion von $t$ gewählt, so gibt es einen Punkt

auf dem Faden, für welchen $\lambda$ verschwindet. Das ihm zugehörende $\alpha$ ergibt sich aus der Gleichung

$$\operatorname{tg}(\alpha - \varphi_0) = \frac{\ddot{\vartheta}}{\dot{\vartheta}^2}.$$

Hierdurch ist $\alpha$ in Funktion von $t$ bestimmt, d. h. der Punkt, in welchem $\lambda$ verschwindet, wandert längs des Fadens. Es ist daher im allgemeinen für ein bestimmtes Fadenstück die Spannung nur in einem gewissen Zeitintervall positiv.

*2. Fall.* Die Relation wird auch erfüllt durch die Gleichungen

$$k_1\left[u\frac{d}{da}\left(\Theta\frac{du}{da}\right)+v\frac{d}{da}\left(\Theta\frac{dv}{da}\right)\right]+k_2\left[u\frac{d}{da}\left(\Theta\frac{dv}{da}\right)-v\frac{d}{da}\left(\Theta\frac{du}{da}\right)\right]$$
$$+k_3\left[\sin\alpha_0\frac{d}{da}\left(\Theta\frac{du}{da}\right)-\cos\alpha_0\frac{d}{da}\left(\Theta\frac{dv}{da}\right)\right]=0$$

$$k_2\ddot{\vartheta}=k_1\dot{\vartheta}^2.$$

$$k_3\ddot{\vartheta}=k_1\lambda_0.$$

Aus der ersten Gleichung folgt mit Hilfe der Unausdehnsamkeitsbedingung:

$$\frac{d}{da}\left(\Theta\frac{du}{da}\right)=\frac{k_2u+k_1v-k_3\cos\alpha_0}{\pm[(k_2u+k_1v-k_3\cos\alpha_0)^2+(-k_1u+k_2v-k_3\sin\alpha_0)^2]^{1/2}}$$

$$\frac{d}{da}\left(\Theta\frac{dv}{da}\right)=\frac{-k_1u+k_2v-k_3\sin\alpha_0}{\pm[(k_2u+k_1v-k_3\cos\alpha_0)^2+(-k_1u+k_2v-k_3\sin\alpha_0)^2]^{1/2}}.$$

Führt man nun durch (14) wieder $p$, $q$ ein, so folgt:

$$\frac{d}{da}\left(\Theta\frac{dp}{da}\right)=\frac{p+mq}{\pm\sqrt{1+m^2}\cdot\sqrt{p^2+q^2}}$$

$$\frac{d}{da}\left(\Theta\frac{dq}{da}\right)=\frac{q-mp}{\pm\sqrt{1+m^2}\cdot\sqrt{p^2+q^2}}.$$

Setzt man hierin wieder

$$p=R\cos\Phi,\quad q=R\sin\Phi,\quad m=\operatorname{tg}\varepsilon,$$

so folgt durch Division

$$\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}(\Phi-\varepsilon)\quad\text{oder}\quad\Phi-\varepsilon=\alpha,$$

also

$$\frac{d\Phi}{da}=\frac{1}{\varrho}.$$

Erfolgt die Rotation gleichförmig, so ist $m=0$ zu setzen, und man erhält:

$$\frac{d}{da}\left(\Theta\frac{dp}{da}\right)=\frac{p}{\pm\sqrt{p^2+q^2}}$$

$$\frac{d}{da}\left(\Theta\frac{dq}{da}\right)=\frac{q}{\pm\sqrt{p^2+q^2}}.$$

Führt man wieder die Polarkoordinaten ein, so gelangt man, wenn nur das negative Zeichen benützt wird, zu den Gleichungen:

$$\frac{d}{da}\left(\Theta\frac{dR}{da}\right) - \Theta R\left(\frac{d\Phi}{da}\right)^2 = -1$$

$$\frac{d}{da}\left(\Theta R^2\frac{d\Phi}{da}\right) = 0.$$

Die letzte Gleichung gibt integriert:

$$\Theta R^2\frac{d\Phi}{da} = B$$

oder

$$\varrho = \frac{\Theta R^2}{B}. \tag{32}$$

Damit erhält man aus der ersten Gleichung:

$$R^3\Theta\frac{d}{da}\left(\Theta\frac{dR}{da}\right) + \Theta R^3 - B^2 = 0.$$

Ist $\Theta$ in Funktion von $a$ gegeben, so bestimmt sich aus dieser Gleichung $R$ in Funktion von $a$. Man kann diese Gleichung unter Benützung von (32) auf Quadraturen zurückführen, indem man $\Theta$ nicht in Funktion von $a$, sondern in Funktion des Krümmungsradius $\varrho$ gibt.

Wenn in (26) Produkte verschwinden, so erhält man nichts Neues.